応用微分方程式論

1. 次の常微分方程式の解を求めよ．

$$x'(t) = -y(t), \quad y'(t) = x(t) \qquad t > 0$$
$$x(0) = 1, \quad y(0) = -2$$

2. 与えられた関数 f に対して Fourier 変換 $\widehat{f}$ を

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy}\, dx$$

とおく．このとき次の設問に答えよ．

(a) $g(x) = e^{-x^2}$ の Fourier 変換 $\widehat{g}(y)$ を求めよ．

(b) $h(x) = xe^{-x^2}$ の Fourier 変換 $\widehat{h}(y)$ を求めよ．

3. 次の熱方程式の解 $u(x,t)$ を求めよ．

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ &u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0 && t > 0, \\ &u(x,0) = \sin x + \sin(2x) + \sin(5x) && 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

4. 熱方程式

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && -\infty < x < \infty,\ t > 0, \\ &u(x,0) = a(x) && -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

の解 $u(x,t)$ をかけ．（答えのみで良い．）ここで $a(x)$ は与えられた有界な関数である．

5. 与えられた関数 f，g に対し，次の波動方程式について設問に答えよ．

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && -\infty < x < \infty,\ -\infty < t < \infty, \\ &u(x,0) = f(x) \quad u_t(x,0) = g(x) && -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

(a) 解 $u(x,t)$ を f と g で表せ．（答えのみで良い．）

(b) $f(x) = \sin x$，$g(x) = xe^{-x^2}$ のとき $u(x,t)$ を求めよ．