

## [招待講演] セルラネットワークの空間確率モデル

### —ジニブル点過程を用いた基地局の配置—

三好 直人<sup>†</sup>

<sup>†</sup> 東京工業大学 大学院情報理工学研究科 数理・計算科学専攻

〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1-W8-52

E-mail: [†miyoshi@is.titech.ac.jp](mailto:†miyoshi@is.titech.ac.jp)

**あらまし** 最近, 空間点過程を用いて無線通信ネットワークの無線ノードの配置をモデル化し, 得られた確率モデルの解析を通してネットワークの性能を評価しようという研究が盛んに行われています. こうした無線ネットワークの空間確率モデルの解析では, 無線ノードの配置モデルとして定常ポアソン点過程が広く用いられています. 確かに定常ポアソン点過程を用いると解析が容易になるのですが, 無線ノードが互いに独立に位置していることを仮定してしまっています. 一方, 実際のセルラネットワークの特にマクロセル基地局を見てみると, それらは互いに独立な位置にあるということではなく, (電波干渉の影響をなるべく受けないように) ある程度の距離をとって設置されています. 本稿では, セルラネットワークにおける基地局の配置をジニブル点過程 (互いに反発する点の配置を表現できる行列式点過程の1つ) によって表した空間確率モデルを考え, その解析結果を紹介します. また, この基本的な結果が現在どこまで一般化されているのか, 筆者の知る範囲で概観してみます.

**キーワード** セルラネットワーク, 空間点過程, ジニブル点過程, 信号対干渉雑音比, 被覆確率

## [Invited Talk] Spatial Stochastic Models for Cellular Networks

### —Application of the Ginibre Point Process to Base Station Deployments—

Naoto MIYOSHI<sup>†</sup>

<sup>†</sup> Department of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology

2-12-1-W8-52 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8552, Japan

E-mail: [†miyoshi@is.titech.ac.jp](mailto:†miyoshi@is.titech.ac.jp)

**Abstract** Recently, studies on spatial stochastic models for wireless communication networks have been attracting much attention. In the analysis of these spatial models for the wireless networks, the stationary Poisson point processes have widely used to model the configuration of wireless nodes. While such a Poisson process based model is tractable to analyze, it is an idealized one and ignores the spatial correlation among the wireless nodes. In a real cellular network, however, we can observe the repulsive nature of the configuration of macro base stations. In this report, we show the basic results of the performance analysis of the cellular network model such that the base stations are deployed according to the Ginibre point process, which is one of the determinantal point processes and accounts for the repulsion among the base stations. Furthermore, we give a brief review on some recent extensions, to the best of the knowledge of the author.

**Key words** Cellular networks, spatial point processes, Ginibre point process, signal-to-interference-plus-noise ratio, coverage probability

#### 1. はじめに

最近, 空間点過程を用いて無線通信ネットワークの無線ノ

ードの配置をモデル化し, そうして得られた確率モデルの解析を通してネットワークの性能を評価しようという研究が盛んに行われており, 多くの解説・サーベイ論文 ([1]~[3]) や専門

書 ([4]~[7]) が発表されています。この理由として、無線通信ネットワークの性能が無線ノードの配置に大きく依存すること、そして無線ノードは規則正しく配置されている訳ではなく、一見ランダムに配置されているように見えること等が挙げられます。こうした無線ネットワークに対する空間確率モデルの解析では、無線ノードの配置モデルとして定常ポアソン点過程が広く用いられています。確かに定常ポアソン点過程は解析的な扱いが容易ではあるのですが、無線ノードが互いに独立に位置していることを仮定してしまっています。一方、実際のセルラネットワークの特にマクロセル基地局を見てみると、地理的な要因等から不規則性は現れるにしても、互いに独立な位置にあるということはなく、電波干渉の影響をなるべく受けないように、ある程度の距離をとって設置されています。そこで、セルラネットワークの基地局の配置モデルとして、互いに反発する点の配置を表現できる行列式点過程 (determinantal point processes) を用いた研究が注目されています ([8]~[15])。

本稿では、基本的なセルラネットワークの空間確率モデルを考え、行列式点過程の最も代表的な1つであるジニブル (Ginibre) 点過程によって基地局の配置を表した場合の解析結果を紹介します。また、この基本的な結果が現在どこまで一般化されているのか、筆者の知る範囲で概観してみます。

## 2. セルラネットワークのモデルと被覆確率

本節では、セルラネットワークの下りリンクに対する空間確率モデルを紹介します。ただし、最も基本的なモデルとして、すべての基地局が同じ性能を持つ場合を考えます。そして、重要な評価指標の1つである被覆確率 (coverage probability) に対して、単純な仮定のもとで成り立つ基本公式を与えます。

以下、 $\mathbb{R}$  を実数の集合、 $\mathbb{N}$  を自然数の集合とします。また、 $P$  は確率、 $E$  はそれについての期待値を表すものとします。

### 2.1 ネットワーク・モデル

$\Phi = \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  を  $\mathbb{R}^2$  上の点過程とし、単純 (同じ位置に2つ以上の点が重ならない) かつ局所有限 (有界な領域にある点の数は有限) であり、また定常 (平行移動に対して確率分布が不変) であると仮定します。 $X_1, X_2, \dots$  の順番 (添え字の付け方) に決まりはありません。点過程  $\Phi$  は基地局の配置を表し、点  $X_i, i \in \mathbb{N}$ , にある基地局を基地局  $i$  と呼ぶことにします。すべての基地局は同じ送信電力  $p (> 0)$  を持つものとし、送信電波の距離による減衰を伝搬損失関数 (path-loss function)  $\ell(r) = cr^{-2\beta}, r > 0$ , によって表します。ここで、定数  $c (> 0)$  は伝搬損失係数、 $2\beta (\beta > 1)$  は伝搬損失指数と呼ばれます。このモデルを用いて、任意に選んだ地点におけるユーザ端末の受信電力を評価する訳ですが、 $\Phi$  が定常であることとすべての基地局が同じ性能を持つことから、ユーザ端末の位置を原点  $o = (0, 0)$  にとることができ、したがって、基地局  $i (i \in \mathbb{N})$  からの信号を原点  $o$  で受信するときのフェイディングおよびシャドウイングの影響を表す確率変数を  $H_i$  とすると、受信電波の強さは  $pH_i \ell(|X_i|)$  と表されます。この  $H_i, i \in \mathbb{N}$ , は互いに独立な確率変数であり、例えば (シャドウイングを無視して) レイリー (Rayleigh) フェイディングを仮定すると、(電力への

影響は包絡線変動の2乗になるので) 指数分布に従うことになり、仲上- $m$  フェイディングを仮定すると、 $m$  次のアーラン分布に従うことになります。

### 2.2 被覆確率

被覆確率とは、以下で与えられる信号対干渉雑音比 (signal-to-interference-plus-noise ratio; SINR) があらかじめ定められた閾値より大きくなる確率のことです。原点  $o = (0, 0)$  における SINR は、

$$\text{SINR}_o = \frac{pH_{B_o} \ell(|X_{B_o}|)}{N_o + I_o(B_o)}$$

によって与えられ、ここで  $B_o$  は原点  $o$  のユーザ端末と通信している基地局の添え字を表し、 $N_o$  は原点での熱雑音を表す  $\{(X_i, H_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  とは独立な確率変数です。また、 $I_o(i), i \in \mathbb{N}$ , は原点の端末が基地局  $i$  と通信しているときの干渉電波の強さを表し、

$$I_o(i) = \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus \{i\}} pH_j \ell(|X_j|)$$

によって与えられます。すなわち、通信相手の基地局以外のすべての基地局からの信号を干渉電波と考えます。以上より、原点での被覆確率は  $P(\text{SINR}_o > \theta), \theta > 0$ , と表されます。

この被覆確率について、レイリーフェイディングを仮定すると以下の補題が成り立ちます ([16] でも導出しています)。

[補題 1] (Miyoshi & Shirai [8]) 2.1 節で述べたセルラネットワークのモデルに対して、(シャドウイングを無視して) レイリーフェイディングを仮定すると、被覆確率は以下を満足する。

$$\begin{aligned} P(\text{SINR}_o > \theta) \\ = E \left[ \mathcal{L}_N \left( \frac{\theta |X_{B_o}|^{2\beta}}{p^c} \right) \prod_{j \in \mathbb{N} \setminus \{B_o\}} \left( 1 + \theta \left( \frac{|X_{B_o}|}{|X_j|} \right)^{2\beta} \right)^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $\mathcal{L}_N$  は熱雑音  $N_o$  のラプラス変換を表す。

## 3. ジニブル点過程と被覆確率の評価

(1) 式で与えられる被覆確率を評価するためには、基地局の配置を表す点過程  $\Phi = \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  を定めなければなりません。本稿では、ここにジニブル点過程を用います。定常ポアソン点過程を用いた場合は [16] で解説されていますので、興味のある方はご照覧ください (オリジナルの研究成果は [17] です)。

### 3.1 ジニブル点過程

ジニブル点過程は、以下で定義される複素平面  $\mathbb{C}$  上の行列式点過程です (基地局の配置に用いるときは  $\mathbb{C}$  上の点を  $\mathbb{R}^2$  上の点と見なします)。 $\nu$  を  $\mathbb{C}$  上の局所有限な (有界な領域には有限の値を対応させる) 測度とします。 $\mathbb{C}$  上の単純点過程  $\Phi$  と任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して、 $\Phi$  の (参照測度  $\nu$  に対応する)  $n$  次の結合強度を  $\rho_n$  とします。すなわち、 $\mathbb{C}^n$  上で連続かつ対称で有界閉集合の台を持つ実数値関数  $f$  に対して、

$$E \left[ \sum_{\substack{X_1, X_2, \dots, X_n \in \Phi \\ X_i \neq X_j, i, j = 1, 2, \dots, n}} f(X_1, X_2, \dots, X_n) \right]$$

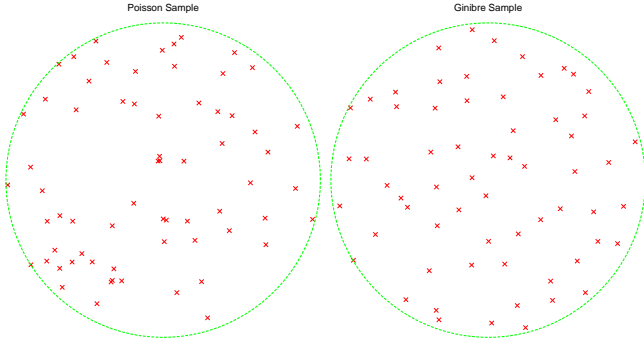


図 1 定常ポアソン点過程 (左) とジニブル点過程 (右) の標本  
Fig. 1 Samples of the stationary Poisson (left) and Ginibre (right) point processes.

$$= \int \int \cdots \int_{\mathbb{C}^n} f(z_1, z_2, \dots, z_n) \times \rho_n(z_1, z_2, \dots, z_n) \nu(dz_1) \nu(dz_2) \cdots \nu(dz_n).$$

が成り立ちます。このとき、 $\mathbb{C}^2$  から  $\mathbb{C}$  への関数  $K$  が存在して、

$$\rho_n(z_1, z_2, \dots, z_n) = \det(K(z_i, z_j))_{i,j=1}^n$$

と表せるならば、 $\Phi$  は (参照測度  $\nu$  に対応する) 核関数  $K$  を持つ行列式点過程であるといえます (詳細は [18]~[20] 等を参照)。ここで、 $\det$  は行列式を表します。さらに、核関数  $K$  と参照測度  $\nu$  が、それぞれ  $K(z, w) = e^{z\bar{w}}$ ,  $\nu(dz) = \pi^{-1} e^{-|z|^2} \mu(dz)$  によって与えられるとき、 $\Phi$  をジニブル点過程といいます。ここで、 $\mu$  は  $\mathbb{C}$  上のルベーグ測度 (領域  $A \subset \mathbb{C}$  に対して  $\mu(A)$  は複素平面上の面積) であり、 $\bar{w}$  は  $w \in \mathbb{C}$  の複素共役です。ジニブル点過程は定常かつ等方的 (原点まわりの回転に対して確率分布が不変) であることが知られています。また、その強度 (単位面積当たりの点の数の平均) は定義から  $\pi^{-1}$  であることが分かりますが、スケーリングによって調整することもできます。例えば、 $\lambda > 0$  に対して核関数と参照測度をそれぞれ  $K_\lambda(z, w) = e^{\pi \lambda z \bar{w}}$ ,  $\nu_\lambda(dz) = \lambda e^{-\pi \lambda |z|^2} \mu(dz)$  とすると、強度  $\lambda$  のジニブル点過程が得られます。

図 1 は、定常ポアソン点過程とジニブル点過程の標本の例です。ポアソン点過程では、各点が互いに独立に位置しているため、点が密集しているところと広く隙間が空いているところが現れますが、ジニブル点過程では、ランダムでありながらもバランス良く点が配置されている様子を見ることができます。

さて、基地局の配置モデルとしてジニブル点過程を用いるとき、最も重要な役割を担うのが次の命題です。

[命題 1] (Kostlan [21])  $X_i, i \in \mathbb{N}$ , をジニブル点過程の点とする。また、 $Y_i, i \in \mathbb{N}$ , を次数  $i$ , 率パラメータ 1 のアーラン分布に従う確率変数として、 $Y_1, Y_2, \dots$  は互いに独立であるものとする。このとき、確率変数の集合  $\{|X_i|^2\}_{i \in \mathbb{N}}$  と  $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  は同じ確率法則に従う。

命題 1 は、ジニブル点過程の点配置には (負の) 相関があるものの、原点からの距離だけに着目すると互いに独立であることを表しています。この結果は核関数  $K$  の点対称性から導かれ、ジニブル点過程に限らず、点対称な核関数を持つ

行列式点過程に対しては同様の結果が成り立ちます ([20] の Theorem 4.7.1 を参照)。命題 1 において、 $\Phi = \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  を強度が  $\lambda (> 0)$  になるようにスケーリングしたジニブル点過程とすると、 $\{|X_i|^2\}_{i \in \mathbb{N}}$  は  $\{Y_i/(\pi \lambda)\}_{i \in \mathbb{N}}$  と同じ確率法則に従います。

### 3.2 被覆確率の評価

(1) 式で与えられる被覆確率において、 $\Phi = \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  は強度  $\lambda (> 0)$  のジニブル点過程に従うものとし、また、各ユーザ端末は最も近い基地局と通信するものとし、すなわち、 $\{B_o = i\} = \{|X_i| \leq |X_j|, j \in \mathbb{N}\}$  です。命題 1 より、各  $i = 1, 2, \dots$  に対して、次数  $i$ , 率パラメータ 1 のアーラン分布に従う確率変数  $Y_i$  を用いて  $|X_i|^2 = Y_i/(\pi \lambda)$  とすることができ、 $(\{B_o = i\} = \{Y_i \leq Y_j, j \in \mathbb{N}\})$  と  $Y_i, i \in \mathbb{N}$ , の独立性に注意して (1) 式にアーラン分布の確率密度関数  $f_i(x) = e^{-x} x^{i-1}/(i-1)!, x \geq 0$ , を適用すると、

$$\begin{aligned} P(\text{SINR}_o > \theta) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \int_0^{\infty} e^{-x} x^i \mathcal{L}_N\left(\frac{\theta}{pc} \left(\frac{x}{\pi \lambda}\right)^\beta\right) \\ &\quad \times \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\infty} \left(\frac{1}{j!} \int_x^{\infty} \frac{e^{-y} y^j}{1 + \theta(x/y)^\beta} dy\right) dx \end{aligned}$$

となります。これをまとめて次の定理を得ます。

[定理 1] (Miyoshi & Shirai [8]) 2.1 節のセルラネットワークのモデルにおいて、基地局の配置  $\Phi = \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  が強度  $\lambda (> 0)$  のジニブル点過程に従うものとし、またユーザ端末は最も近くの基地局と通信するものとする。このとき、補題 1 の被覆確率は以下を満足する。

$$\begin{aligned} P(\text{SINR}_o > \theta) &= \int_0^{\infty} \mathcal{L}_N\left(\frac{\theta}{pc} \left(\frac{x}{\pi \lambda}\right)^\beta\right) e^{-x} M(x, \theta, \beta) S(x, \theta, \beta) dx. \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、

$$M(x, \theta, \beta) = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \int_x^{\infty} \frac{e^{-y} y^i}{1 + \theta(x/y)^\beta} dy, \quad (3)$$

$$S(x, \theta, \beta) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \left( \int_x^{\infty} \frac{e^{-y} y^i}{1 + \theta(x/y)^\beta} dy \right)^{-1}. \quad (4)$$

この定理から、熱雑音  $N_o$  のラプラス変換  $\mathcal{L}_N$  が数値的に求められれば、被覆確率も数値積分によって計算できることが分かります。ここで、(3) 式の無限積と (4) 式の無限和は互いに入れ子になっておらず、また同じ積分を含んでいますので、1 つの繰り返し計算によって同時に計算することができます。(2) 式において、点過程の強度  $\lambda$ , 送信電力  $p$ , 伝搬損失係数  $c$  は  $\mathcal{L}_N$  の変数にしか現れませんが、雑音が無視できる状況では、被覆確率はこれらのパラメータに依存しないことが分かります (これは定常ポアソン点過程の場合も同様です)。

図 2 は、基地局がジニブル点過程に従って配置されたモデルと定常ポアソン点過程に従って配置されたモデルのそれぞれに

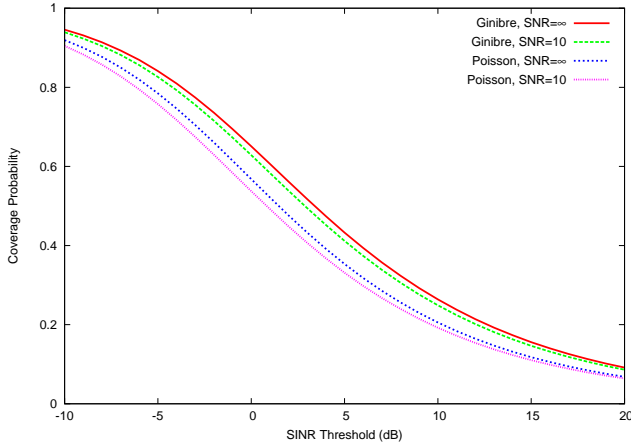


図2 雑音のある場合とない場合の被覆確率 ([8] より抜粋)

Fig. 2 Coverage probability with or without noise (extracted from [8]).

ついて、雑音がある場合と無い場合の被覆確率  $P(\text{SINR} > \theta)$  を表しています (以降の図も含めて横軸の単位はデシベル (dB); 横軸の値  $x$  に対して  $\theta = 10^{x/10}$  です). ただし、点過程の強度を  $\lambda = \pi^{-1}$  とし、伝搬損失関数を  $\ell(r) = r^{-4}$  としています. ここでは、雑音  $N_0$  を定数として、これを信号対雑音比  $\text{SNR} = p/N_0$  により与えています ( $\text{SNR} = \infty$  が雑音無しに相当). 図で確認できる範囲では、雑音の影響はそれほど大きくないことが分かります. さらに、基地局がジニブル点過程に従って配置されたモデルのほうが、定常ポアソン点過程に従って配置されたモデルよりも被覆確率が大きくなることも確認できますが、これについては次節でもう一度見ることにします.

#### 4. 定理 1 の一般化

前節では、基地局が 1 種類しかない基本的なモデルに対して、それらがジニブル点過程に従って配置されている場合の被覆確率を考えました. 基地局が定常ポアソン点過程に従って配置されているモデルについては、ネットワークが複数種類の基地局 (マクロセル, ピコセル, フェムトセル等) からなるモデル ([22]~[26]), フェイディング/シャドウイングが任意の分布に従うモデル ([24]~[28]), 1 つのユーザ端末が同時に複数の基地局と通信できるモデル ([28]~[32]), 複数のアンテナを持つ (multi-input multi-output; MIMO) モデル ([33], [34]) 等、様々な方向への発展が考えられていますが、ジニブル点過程を含む行列式点過程に従って基地局が配置されるモデルについては、まだそこまでは至っていません. 本節では、現時点で定理 1 がどこまで一般化されているのか、筆者の知る範囲で概観してみます.

パラメータ  $\alpha \in (0, 1]$  によって定常ポアソン点過程とジニブル点過程の間を補間する  $\alpha$ -ジニブル点過程という行列式点過程があり ([35]), これは  $\alpha = 1$  のとき通常のジニブル点過程に一致し、 $\alpha \rightarrow 0$  とすると定常ポアソン点過程に弱収束します. この  $\alpha$ -ジニブル点過程をセルラネットワークの基地局の配置に用いたモデルに対しても、定理 1 と同様、被覆確率

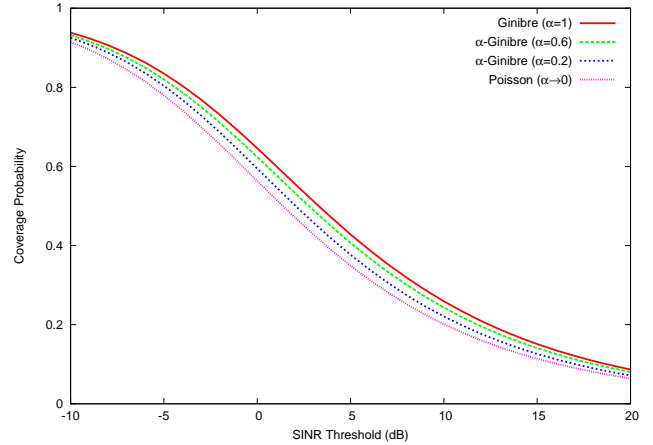


図3 パラメータ  $\alpha$  による被覆確率の比較 ([10] より抜粋)

Fig. 3 Comparison of coverage probability in terms of parameter  $\alpha$  (extracted from [10]).

が数値計算可能な形で求められています ([10]). 図 3 は、ノイズは無く ( $N_0 = 0$ ), 伝搬損失指数  $\beta = 2.0$  ( $\ell(r) = r^{-4}$ ) の場合に、被覆確率がパラメータ  $\alpha$  の値によってどのように変わるのかを表しています (この図における “Ginibre ( $\alpha = 1$ )” と “Poisson ( $\alpha \rightarrow 0$ )” の曲線は、それぞれ図 2 における “Ginibre,  $\text{SNR} = \infty$ ” と “Poisson,  $\text{SNR} = \infty$ ” の曲線と同じです). 図から確認できる範囲では、被覆確率は  $\alpha$  について単調に増加しています. このことは、すべての基地局が同じ性能を持つ場合、基地局がバランスよく配置しているほど被覆確率が大きくなることを示しています. 文献 [14] では、実際の基地局の位置データに  $\alpha$ -ジニブル点過程を当てはめて  $\alpha$  の値を推定しています. また [11] では、基地局が  $\alpha$ -ジニブル点過程に従って配置されたモデルについて、被覆確率の漸近的な挙動を調べています.

さらに [10] では、複数種類の基地局を持つセルラネットワークにも  $\alpha$ -ジニブル点過程を適用しています. すなわち、大きい送信電力で広範囲をカバーできるマクロセル基地局の配置には、強度が小さく  $\alpha$  の値が 1 に近い  $\alpha$ -ジニブル点過程を用いる一方、送信電力が小さく狭い範囲しかカバーできないピコセルやフェムトセル基地局の配置には  $\alpha$  の値の小さい (ポアソン点過程に近い)  $\alpha$ -ジニブル点過程を用いています. このように複数の  $\alpha$ -ジニブル点過程を重ね合わせて得られるモデルに対しても、被覆確率を数値計算可能な形で求めることができます.

先にも述べたように、基地局が定常ポアソン点過程に従って配置されたモデルについては、任意の分布に従うフェイディングやシャドウイングを考えることができますが、基地局がジニブル点過程に従って配置されたモデルについては、これまでレイリーフェイディングが仮定されていました. それに対して [15] では、仲上- $m$  フェイディングを持つモデルに対して、定理 1 と同様、被覆確率を数値計算可能な形で導いています. 図 4 は、基地局がジニブル点過程に従って配置されたモデルと定常ポアソン点過程に従って配置されたモデルのそれぞれについて、レイリーフェイディングと仲上-2 フェイディングを持つ場合の被覆確率を表しています. ここでも、ノイズ

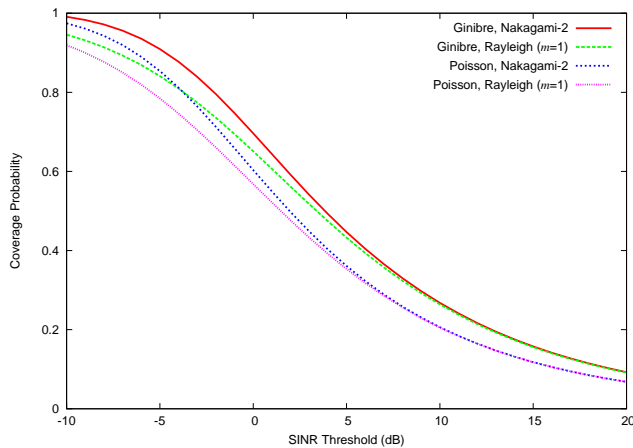


図4 レイリーフェイディングと仲上-2 フェイディングによる被覆確率の比較 ([15] より抜粋)

Fig.4 Comparison of coverage probability over Rayleigh and Nakagami-2 fading (extracted from [15]).

は無く ( $N_o = 0$ ), 伝搬損失指数を  $\beta = 2.0$  ( $\ell(r) = r^{-4}$ ) としています (この図における “Ginibre, Rayleigh ( $m = 1$ )” と “Poisson, Rayleigh ( $m = 1$ )” の曲線は, それぞれ図2における “Ginibre, SNR =  $\infty$ ” と “Poisson, SNR =  $\infty$ ” の曲線と同じです). ジニブル点過程と定常ポアソン点過程のどちらの場合についても, 特に閾値  $\theta$  が小さいところでは, 仲上-2 フェイディングのほうがレイリーフェイディングよりも被覆確率が大きくなっていることが確認できます.

## 5. おわりに

本稿では, セルラネットワークの空間確率モデルを紹介し, 基地局がジニブル点過程に従って配置されている場合に被覆確率が数値計算可能な形で導出されることを示しました. また, この結果の現時点での拡張についても概観しました. ここで紹介した結果は任意地点にいるユーザから見た評価ですが, 基地局側から見た上りリンクの解析もなされています ([12], [36]~[38]). 今後の方向として, 例えばマルチユーザ・ダイバーシティを利用したスケジューリングの評価や, あるいは情報理論的な立場からだけでなく, (トラフィックに応じた送信電力制御等) トラフィックと連動した評価に空間確率モデルが利用できると興味深いかもしれません.

## 文献

- [1] M. Haenggi, J. G. Andrews, F. Baccelli, O. Dousse and M. Franceschetti, “Stochastic geometry and random graphs for the analysis and design of wireless networks,” *IEEE J. Select. Areas Commun.*, **27**, pp. 1029–1046 (2009).
- [2] J. G. Andrews, R. K. Ganti, M. Haenggi, N. Jindal and S. Weber, “A primer on spatial modeling and analysis in wireless networks,” *IEEE Commun. Mag.*, **48**, pp. 156–163 (2010).
- [3] H. ElSawy, E. Hossain and M. Haenggi, “Stochastic geometry for modeling, analysis, and design of multi-tier and cognitive cellular wireless networks: A survey,” *IEEE Commun. Surveys Tutorials*, **15**, pp. 996–1019 (2013).
- [4] F. Baccelli and B. Błaszczyszyn, “Stochastic geometry and wireless networks, Volume I: Theory,” *Foundations Trends (R) Netw.*, **3**, pp. 249–449 (2009).

- [5] F. Baccelli and B. Błaszczyszyn, “Stochastic geometry and wireless networks, Volume II: Applications,” *Foundations Trends (R) Netw.*, **4**, pp. 1–312 (2009).
- [6] M. Haenggi, *Stochastic Geometry for Wireless networks*, Cambridge Univ. Press (2013).
- [7] S. Mukherjee, *Analytical Modeling of Heterogeneous Cellular Networks: Geometry, Coverage, and Capacity*, Cambridge Univ. Press (2014).
- [8] N. Miyoshi and T. Shirai, “A cellular network model with Ginibre configured base stations,” *Adv. Appl. Probab.*, **46**, pp. 832–845 (2014).
- [9] G. L. Torrisi and E. Leonardi, “Large deviations of the interference in the Ginibre network model,” *Stoch. Syst.*, **4**, pp. 1–33 (2014).
- [10] I. Nakata and N. Miyoshi, “Spatial stochastic models for analysis of heterogeneous cellular networks with repulsively deployed base stations,” *Perform. Eval.*, **78**, pp. 7–17 (2014).
- [11] N. Miyoshi and T. Shirai, “Cellular networks with  $\alpha$ -Ginibre configured base stations,” *The Impact of Applications on Mathematics: Proc. Forum Math. for Industry 2013*, Springer, pp. 211–226 (2014).
- [12] T. Kobayashi and N. Miyoshi, “Uplink cellular network models with Ginibre deployed base stations,” *26th ITC* (2014).
- [13] Y. Li, F. Baccelli, H. S. Dhillon and J. G. Andrews, “Statistical modeling and probabilistic analysis of cellular networks with determinantal point processes,” *arXiv:1412.2087 [cs.IT]* (2014).
- [14] N. Deng, W. Zhou and M. Haenggi, “The Ginibre point process as a model for wireless networks with repulsion,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, **14**, pp. 107–121 (2015).
- [15] N. Miyoshi and T. Shirai, “Downlink coverage probability in a cellular network with Ginibre deployed base stations and Nakagami- $m$  fading channels,” *13th WiOpt* (2015). To appear.
- [16] 三好: “セルラネットワークの空間点過程モデル,” *オペレーションズ・リサーチ*, **59**, pp. 678–683 (2014).
- [17] J. G. Andrews, F. Baccelli and R. K. Ganti, “A tractable approach to coverage and rate in cellular networks,” *IEEE Trans. Commun.*, **59**, pp. 3122–3134 (2011).
- [18] A. Soshnikov, “Determinantal random point fields,” *Russian Math. Surveys*, **55**, pp. 923–975 (2000).
- [19] T. Shirai and Y. Takahashi, “Random point fields associated with certain Fredholm determinants I: Fermion, Poisson and Boson processes,” *J. Funct. Anal.*, **205**, pp. 414–463 (2003).
- [20] J. B. Hough, M. Krishnapur, Y. Peres and B. Virág, *Zeros of Gaussian Analytic Functions and Determinantal Point Processes*, Amer. Math. Soc. (2009).
- [21] E. Kostlan, “On the spectra of Gaussian matrices,” *Linear Algebra Appl.*, **162–164**, pp. 385–388 (1992).
- [22] H. S. Dhillon, R. K. Ganti, F. Baccelli and J. G. Andrews, “Modeling and analysis of  $K$ -tier downlink heterogeneous cellular networks,” *IEEE J. Select. Areas Commun.*, **30**, pp. 550–560 (2012).
- [23] H.-S. Jo, Y. J. Sang, P. Xia and J. G. Andrews, “Heterogeneous cellular networks with flexible cell association: A comprehensive downlink SINR analysis,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, **11**, pp. 3484–3495 (2012).
- [24] S. Mukherjee, “Distribution of downlink SINR in heterogeneous cellular networks,” *IEEE J. Select. Areas Commun.*, **30**, pp. 575–585 (2012).
- [25] P. Madhusudhanan, J. G. Restrepo, Y. Liu and T. X. Brown, “Downlink coverage analysis in a heterogeneous cellular network,” *2012 IEEE GLOBECOM*, pp. 4170–4175 (2012).
- [26] M. Di Renzo, A. Guidotti and G. E. Corazza, “Average rate of downlink heterogeneous cellular networks over gen-

- eralized fading channels: A stochastic geometry approach,” *IEEE Trans. Commun.*, **61**, pp. 3050–3071 (2013).
- [27] H. P. Keeler, B. Błaszczyszyn and M. Karray, “SINR-based  $k$ -coverage probability in cellular networks with arbitrary shadowing,” 2013 IEEE ISIT Proc., pp. 1167–1171 (2013).
- [28] B. Błaszczyszyn and H. P. Keeler, “Studying the SINR process of the typical user in Poisson networks by using its factorial moment measures,” arXiv:1401.4005 [cs.NI] (2014).
- [29] G. Nigam, P. Minero and M. Haenggi, “Coordinated multi-point joint transmission in heterogeneous networks,” *IEEE Trans. Commun.*, **62**, pp. 4134–4146 (2014).
- [30] R. Tanbourgi, S. Singh, J. G. Andrews and F. K. Jondral, “A tractable model for noncoherent joint-transmission base station cooperation,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, **13**, pp. 4959–4973 (2014).
- [31] F. Baccelli and A. Giovanidis, “A stochastic geometry framework for analyzing pairwise-cooperative cellular networks,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, **14**, pp. 794–808 (2015).
- [32] A. Giovanidis, L. D. Álvarez-Corrales and L. Decreasefond, “Analyzing interference from static cellular cooperation using the nearest neighbour model,” *WiOpt-SpaSWiN 2015* (2015). To appear.
- [33] H. S. Dhillon, M. Kountouris and J. G. Andrews, “Downlink MIMO HetNets: Modeling, ordering results and performance analysis,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, **12**, pp. 5208–5222 (2013).
- [34] A. K. Gupta, H. S. Dhillon, S. Vishwanath and J. G. Andrews, “Downlink coverage probability in MIMO HetNets with flexible cell selection,” 2014 IEEE GLOBECOM, pp. 1534–1539 (2014).
- [35] A. Goldman, “The Palm measure and the Voronoi tessellation for the Ginibre process,” *Annals Appl. Probab.*, **20**, pp. 90–128 (2010).
- [36] T. D. Novlan, H. S. Dhillon and J. G. Andrews, “Analytical modeling of uplink cellular networks,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, **12**, pp. 2669–2679 (2013).
- [37] H. ElSawy and E. Hossain, “Stochastic geometry modeling of cellular uplink transmission with truncated channel inversion power control,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, **13**, pp. 4454–4469 (2014).
- [38] F. J. Martin-Vega, F. J. Lopez-Martinez, G. Gomez and M. C. Aguayo-Torres, “Multi-user coverage probability of uplink cellular systems: A stochastic geometry approach,” arXiv:1404.1068 [cs.IT] (2014).