Lagrange 緩和と SDP 緩和

東京工業大学　情報理工学研究科
数理・計算科学専攻
小島政和

２００3年6月

目標＝"凸性を持たない問題の大域的最適化"

内容

1. 最適化問題と緩和
2. Lagrange 緩和
3. Lagrange 双対問題
4. 非凸2次最適化問題の SDP* 緩和
5. 非凸2次最適化問題の Lagrange 緩和 = SDP 緩和
6. 多項式計画問題の Lagrange 緩和 $\Longrightarrow$ SDP 緩和
7. まとめ

$\star$: Semidefinite Program, 半正定値計画問題

1. 最適化問題と緩和 — 1

最適化問題

$\mathcal{P}_0$ 目的: $f_0(x) \to$ 最小化; 条件: $x \in S_0$. ただし, $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $S_0 \subset \mathbb{R}^n$.

- 一般の非線形, 組合せ最適化問題の大域的最適解を正確に求めるのは難しい

不等式・等式最適化問題

目的: $f_0(x) \to$ 最小化;
条件: $f_i(x) \leq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, \ell)$, $f_j(x) = 0 \ (j = \ell + 1, \ldots, m)$.

- 関数 f_i の性質, 条件

”連続”, ”なめらか(微分可能)”

”非凸”, ”凸”

”線形”, ”2 次”, ”多変数多項式”

1. 最適化問題と緩和 — 2

最適化問題

$\mathcal{P}_0$ 目的: $f_0(x) \rightarrow$ 最小化; 条件: $x \in S_0$. ただし, $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $S_0 \subset \mathbb{R}^n$.

− 般の非線形, 組合せ最適化問題の大域的最適解を正確に求めるのは難しい

例1 (2 次最適化問題)

目的: $x_2^2 \rightarrow$ 最小化; 条件: $x_1^2 + x_2^2 \leq 4$, $-x_1^2/8 + 1 \leq x_2$.

0-1 変数; $x_j = 0$ or $1 \Leftrightarrow x_j(x_j - 1) = 0$ (2 次等式)

例2 (多項式最適化問題)

目的: $-x_1^3 + 2x_1x_2^2 \rightarrow$ 最小化; 条件: $x_1^4 + x_2^4 \leq 1$, $x_1 \geq 0$, $x_1^2 + x_2^2 \geq 0.5$.

- 2 次関数の記述能力 $\leq$ 多変数多項式の記述能力
- 多変数多項式 + 凸関数 ($-\log(x)$, e^x 等) で記述される最適化問題が大域的最適化のフレームワークとしてよい?

1．最適化問題と緩和 — 3

最適化問題

$\mathcal{P}_0$ 目的：$f_0(x) \to$ 最小化; 条件：$x \in S_0$. ただし，$f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，$S_0 \subset \mathbb{R}^n$.

一般の非線形，組合せ最適化問題の大域的最適解を正確に求めるのは難しい

$$\Downarrow$$

近似解法：

(i) より小さい目的関数値 $f(x)$ を達成する許容解 $x \in S_0$ を生成する仕組み

(ii) 未知の最小値を見積もる仕組み

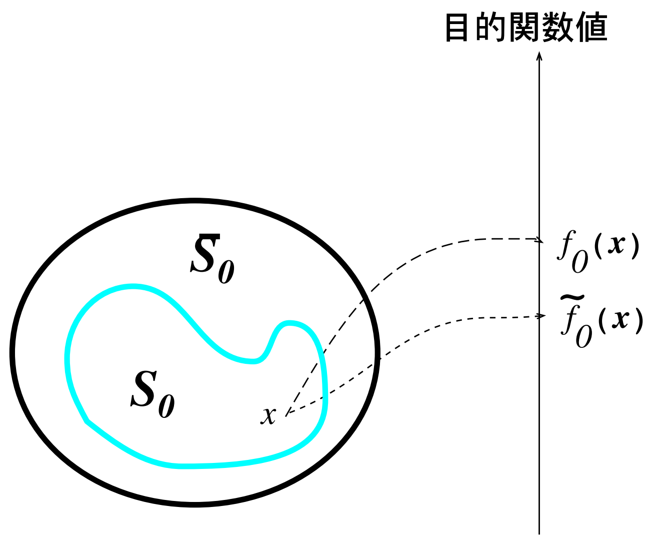
が必要

$$\Downarrow$$

緩和問題

最適化問題: $\mathcal{P}_0$ 目的： $f_0(x) \longrightarrow$ 最小化; 条件： $x \in S_0$

緩和問題: $\widetilde{\mathcal{P}}_0$ 目的： $\tilde{f}_0(x) \longrightarrow$ 最小化; 条件： $x \in \tilde{S}_0$
ただし, $S_0 \subseteq \tilde{S}_0$, かつ $\tilde{f}_0(x) \le f_0(x)$ $(\forall x \in S_0)$



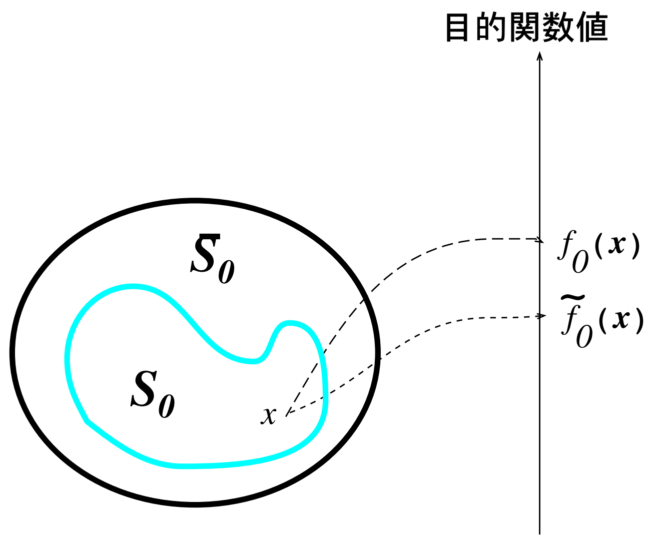
最小値の見積もり：

$$f^* \equiv \mathcal{P} \text{ の最小値（未知）} \ge \tilde{f}^* \equiv \widetilde{\mathcal{P}}_0 \text{ の最小値}$$

すでに計算した近似最小値 $f(\hat{x})$ と $\tilde{f}^*$ との差 $f(\hat{x}) - \tilde{f}^*$ が十分に小さければ，近似最小解 $\hat{x}$ を安心して使える

最適化問題: $\mathcal{P}_0$ **目的**: $f_0(x) \longrightarrow$ **最小化**; **条件**: $x \in S_0$

緩和問題: $\widetilde{\mathcal{P}}_0$ **目的**: $\tilde{f}_0(x) \longrightarrow$ **最小化**; **条件**: $x \in \tilde{S}_0$
ただし, $S_0 \subseteq \tilde{S}_0$, **かつ** $\tilde{f}_0(x) \leq f_0(x)$ $(\forall x \in S_0)$



緩和問題が満たすべき条件

- $S_0 \subseteq \tilde{S}_0$
- $\tilde{f}_0(x) \leq f_0(x)$ $(\forall x \in S_0)$.
- $y \notin S_0$ に対しては，$\tilde{f}_0(y)$ と $f_0(y)$ の大小関係は問わない！

緩和の例

例1（2次最適化問題）

$$\text{目的：} x_2^2 \to \text{最小化；条件：} x_1^2 + x_2^2 \leq 4,\ -x_1^2/8 + 1 \leq x_2.$$

$$\Downarrow \text{緩和}$$

$$\text{目的：} x_2^2 \to \text{最小化；条件：} x_2^2 \leq 4.$$

例2（多項式最適化問題）

$$\text{目的：} -x_1^3 + 2x_1x_2^2 \to \text{最小化；条件：} x_1^4 + x_2^4 \leq 1,\ x_1 \geq 0,\ x_1^2 + x_2^2 \geq 0.5$$

$$\Downarrow \text{緩和}$$

$$\text{目的：} -x_1 \to \text{最小化；条件：} x_1 \leq 1,\ x_1 \geq 0.$$

システマティックに緩和問題を作るには？

- Lagrange 緩和 —— 一般の等式不等式条件付き最適化問題に適用可能．ただし，緩和問題が解けるためには条件が必要
- SDP 緩和 —— 多項式最適化問題に適用可能．

2. Lagrange 緩和 — 1

等式条件付き 最適化問題

目的: $f_0(x) \to$ 最小化; 条件: $x \in S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : f_j(x) = 0 (j = 1, \ldots, m)\}$

Lagrange 関数

$$L(x, w) = f_0(x) + w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + \cdots + w_m f_m(x).$$

ただし, $w = (w_1, w_2, \ldots, w_m) \in \mathbb{R}^m$.

Lagrange 関数の性質: $\forall w \in \mathbb{R}^m$ に対して,

$$x \in S_0 \Rightarrow f_j(x) = 0 \ (j = 1, 2, \ldots, m) \Rightarrow$$

$$L(x, w) = f_0(x) + w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + \cdots + w_m f_m(x) = f_0(x)$$

Lagrange 緩和問題: $\forall w \in \mathbb{R}^m$ を固定して,

目的: $L(x, w) \to$ 最小化; 条件: $x \in \mathbb{R}^n$

緩和の条件: $S_0 \subset \mathbb{R}^n$, $L(w, x) \leq f_0(x)$ if $x \in S_0$.

したがって, $L^*(w) \equiv \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, w) \leq \min_{x \in S_0} f_0(x) \ (\forall w \in \mathbb{R}^m_+)$

2. Lagrange 緩和 — 2

不等式条件付き最適化問題

目的: $f_0(x) \longrightarrow$ **最小化**; **条件**: $x \in S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : f_j(x) \leq 0 (j = 1, \ldots, m)\}$

Lagrange 関数

$$L(x, w) = f_0(x) + w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + \cdots + w_m f_m(x).$$

ただし, $w \in \mathbb{R}^m_+ \equiv \{w = (w_1, w_2, \ldots, w_m) \in \mathbb{R}^m : w_j \geq 0\}$.

Lagrange 関数の性質: $\forall w \in \mathbb{R}^m_+$ に対して，

$x \in S_0 \Rightarrow f_j(x) \leq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, m) \Rightarrow$

$$L(x, w) = f_0(x) + w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + \cdots + w_m f_m(x) \leq f_0(x)$$

Lagrange 緩和問題: $\forall w \in \mathbb{R}^m_+$ を固定して，

目的: $L(x, w) \longrightarrow$ **最小化**; **条件**: $x \in \mathbb{R}^n$

緩和の条件: $S_0 \subset \mathbb{R}^n$, $L(w, x) \leq f_0(x)$ if $x \in S_0$.

したがって，$L^*(w) \equiv \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, w) \leq \min_{x \in S_0} f_0(x) \ (\forall w \in \mathbb{R}^m_+)$

2. Lagrange 緩和 — 3

不等式条件付き最適化問題

目的：$f_0(x) \to$ **最小化**; **条件**：$x \in S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : f_j(x) \leq 0 (j = 1, \ldots, m)\}$

Lagrange 関数

$$L(x, w) = f_0(x) + w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + \cdots + w_m f_m(x).$$

ただし，$w \in \mathbb{R}^m_+ \equiv \{w = (w_1, w_2, \ldots, w_m) \in \mathbb{R}^m : w_j \geq 0\}$.

例1　**目的**：$x_2^2 \to$ **最小化**; **条件**：$x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0$, $-x_1^2/8 - x_2 + 1 \leq 0$

$$\begin{aligned} L(x, w) &\equiv x_2^2 + w_1(x_1^2 + x_2^2 - 4) + w_2(-x_1^2/8 - x_2 + 1) \\ &= (w_1 - w_2/8)x_1^2 - w_2 x_2 + (1 + w_1)x_2^2 - 4w_1 + w_2. \end{aligned}$$

ただし，$w_1 \geq 0, w_2 \geq 0$.

Lagrange 緩和問題：$w_1 = 1$, $w_2 = 8$ に固定すると，

目的：$L(x, w) = -8x_2 + 2x_2^2 + 8 \to$ **最小化**; **条件**：$x = (x_1.x_2) \in \mathbb{R}^2$

2. Lagrange 緩和 — 4

不等式条件付き最適化問題

目的: $f_0(x) \to$ **最小化**; **条件**: $x \in S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : f_j(x) \leq 0 (j = 1, \ldots, m)\}$

Lagrange 関数

$$L(x, w) = f_0(x) + w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + \cdots + w_m f_m(x).$$

ただし, $w \in \mathbb{R}^m_+ \equiv \{w = (w_1, w_2, \ldots, w_m) \in \mathbb{R}^m : w_j \geq 0\}$.

例2 (多項式最適化問題)

目的: $-x_1^3 + 2x_1x_2^2 \to$ **最小化**;
条件: $x_1^4 + x_2^4 - 1 \leq 0, -x_1 \leq 0, -x_1^2 - x_2^2 - 0.5 \leq 0.$

$$\begin{aligned} L(x, w) \equiv\ & -x_1^3 + 2x_1x_2^2 + w_1(x_1^4 + x_2^4 - 1) \\ & + w_2(-x_1) + w_3(-x_1^2 - x_2^2 - 0.5) \\ =\ & w_1x_1^4 + w_1x_2^4 - x_1^3 + 2x_1x_2^2 \\ & - w_3x_1^2 - w_3x_2^2 - w_2x_1 - w_1 - 0.5w_3. \end{aligned}$$

ただし, $w_1 \geq 0, w_2 \geq 0$.

- Lagrange 緩和は出来るが, その最小化は依然として難しい? $\Rightarrow$ SOS, SDP緩和

3. Lagrange 双対問題 — 1

不等式条件付き 最適化問題

目的: $f_0(x) \longrightarrow$ **最小化**; **条件**: $x \in S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : f_j(x) \leq 0 (j = 1, \ldots, m)\}$

Lagrange 関数

$$L(x, w) = f_0(x) + w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + \cdots + w_m f_m(x).$$

ただし, $w \in \mathbb{R}^m_+ \equiv \{w = (w_1, w_2, \ldots, w_m) \in \mathbb{R}^m : w_j \geq 0\}.$

Lagrange 緩和問題: $\forall w \in \mathbb{R}^m_+$ を固定して,

目的: $L(x, w) \longrightarrow$ **最小化**; **条件**: $x \in \mathbb{R}^n$

$$L^*(w) \equiv \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, w) \leq \min_{x \in S_0} f_0(x) \quad (\forall w \in \mathbb{R}^m_+)$$

Lagrange 双対問題 (最良の Lagrange 緩和問題)

目的: $L^*(w) \longrightarrow$ **最大化**; **条件**: $w \in \mathbb{R}^m_+$

3. Lagrange 双対問題 — 2

例1 目的： $x_2^2 \to$ 最小化; 条件： $x_1^2 + x_2^2 - 4 \le 0,\ -x_1^2/8 - x_2 + 1 \le 0$

$$\begin{aligned} L(x,w) &\equiv x_2^2 + w_1(x_1^2 + x_2^2 - 4) + w_2(-x_1^2/8 - x_2 + 1) \\ &= (w_1 - w_2/8)x_1^2 - w_2 x_2 + (1 + w_1)x_2^2 - 4w_1 + w_2. \end{aligned}$$

ただし, $w_1 \ge 0, w_2 \ge 0$.

Lagrange 双対問題

$$\max_{(w_1,w_2)\ge 0} \min_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} (w_1 - w_2/8)x_1^2 - w_2 x_2 + (1 + w_1)x_2^2 - 4w_1 + w_2.$$

例2 （多項式最適化問題）

目的： $-x_1^3 + 2x_1x_2^2 \to$ 最小化;
条件： $x_1^4 + x_2^4 - 1 \le 0, -x_1 \le 0, -x_1^2 - x_2^2 - 0.5 \le 0.$

$$\begin{aligned} L(x,w) &= w_1x_1^4 + w_1x_2^4 - x_1^3 + 2x_1x_2^2 \\ &\quad -w_3x_1^2 - w_3x_2^2 - w_2x_1 - w_1 - 0.5w_3. \end{aligned}$$

ただし, $w_1 \ge 0, w_2 \ge 0$.

Lagrange 双対問題: $\displaystyle\max_{(w_1,w_2)\ge 0} \min_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} L(x,w).$

4. 非凸2次最適化問題のSDP緩和 — 1

QOP(2次最適化問題)	目的:	$f_0(x) \equiv x^TQ_0x + q_0^Tx \to$ 最小化
	条件:	$f_i(x) \equiv x^TQ_ix + q_i^Tx + \pi_i \leq 0 \ (i = 1, \ldots, m)$

ただし, $x \in \mathbb{R}^n$: 変数,
$Q_i : n \times n$ 対称行列, $q_i \in \mathbb{R}^n$, $\pi_i \in \mathbb{R}$: 定数

記法: $n \times n$ 対称行列 Q, X に対して, $Q \bullet X = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n Q_{jk}X_{jk}$

この記法を使うと

$$x^TQx = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n Q_{jk}x_jx_k = Q \bullet xx^T.$$

ここで, xx^T は $n \times n$ 対称行列;

$$xx^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1x_1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2x_2 & \cdots & x_1x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_nx_n \end{pmatrix}.$$

4. 非凸2次最適化問題の SDP 緩和 — 2

QOP(2次最適化問題) 目的: $f_0(x) \equiv x^T Q_0 x + q_0^T x \rightarrow$ 最小化
条件: $f_i(x) \equiv x^T Q_i x + q_i^T x + \pi_i \leq 0 \ (i = 1, \ldots, m)$

$\Updownarrow$ 等価

目的: $Q_0 \bullet x x^T + q_0^T x \rightarrow$ 最小化
条件: $Q_i \bullet x x^T + q_i^T x + \pi_i \leq 0 \ (i = 1, \ldots, m)$

$\Updownarrow$ 等価

目的: $Q_0 \bullet X + q_0^T x \rightarrow$ 最小化
条件: $Q_i \bullet X + q_i^T x + \pi_i \leq 0 \ (i = 1, \ldots, m), \ X - x x^T = O$

$\Downarrow$ SDP 緩和

目的: $Q_0 \bullet X + q_0^T x \rightarrow$ 最小化
条件: $Q_i \bullet X + q_i^T x + \pi_i \leq 0 \ (i = 1, \ldots, m), \ X - x x^T \succeq O$

ただし, $A \succeq O \Leftrightarrow$ 対称行列 A が半正定値, A の固有値がすべて非負, または, $u^T A u \geq 0$ for $\forall u \in \mathbb{R}^n$.

4. 非凸2次最適化問題のSDP緩和 — 3

QOP(2次最適化問題) 目的: $f_0(x) \equiv x^T Q_0 x + q_0^T x \to$ 最小化

条件: $f_i(x) \equiv x^T Q_i x + q_i^T x + \pi_i \leq 0 \ (i = 1, \ldots, m)$

$\Downarrow$ SDP緩和

目的: $Q_0 \bullet X + q_0^T x \to$ 最小化

条件: $Q_i \bullet X + q_i^T x + \pi_i \leq 0 \ (i = 1, \ldots, m), \ X - xx^T \succeq O$

$\Updownarrow$ 等価 $X - xx^T \succeq O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & X \end{pmatrix} \succeq O$

SDP 目的: $Q_0 \bullet X + q_0^T x \to$ 最小化

条件: $Q_i \bullet X + q_i^T x + \pi_i \leq 0 \ (i = 1, \ldots, m), \ \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & X \end{pmatrix} \succeq O$

- SDP は LP (Linear Program) の対称行列への空間の拡張
- LP に対する内点法が SDP に拡張されており，かなり大きな問題(n, m が数千程度)まで，効率よく解ける．ただし，n は変数行列 X のサイズ.

5. 非凸2 次最適化問題の Lagrange 緩 和 = SDP 緩 和 — 1

準備 — 1

$\boldsymbol{\lambda} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

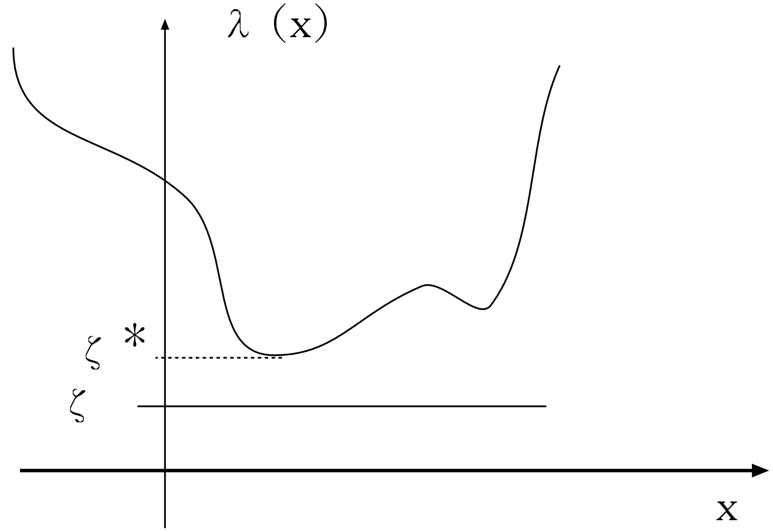
$$\zeta^* = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x})$$

$$\Updownarrow$$

半無限計画(無限個の不等式制約条件付の最適化問題)

$$\text{目的: } \zeta \rightarrow \text{ 最大化; 条件 } \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}) - \zeta \geq 0 \ (\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$$

変数は ζ の み. $x \in \mathbb{R}^n$ は 条件$\boldsymbol{\lambda}(x) - \zeta \geq 0$ $(\forall x \in \mathbb{R}^n)$ 記 述用パ ラ メ ー タ.



5．非凸2次最適化問題の Lagrange 緩和 = SDP 緩和 — 2

準備 — 2

線形・2次関数の非負条件

$$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} + \gamma \geq \mathbf{0} \text{ for } \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$\Updownarrow$$

$$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} + \gamma = (\mathbf{1}, \boldsymbol{x}^T)\boldsymbol{V}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} \text{ for } \exists \boldsymbol{V} \succeq \boldsymbol{O} \text{ and } \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

5. 非凸2次最適化問題の Lagrange 緩和 = SDP 緩和 — 3

準備 — 3

例：線形・2次関数 $\lambda(x) = d + bx_1 + cx_2 + x_1^2 + ax_1x_2 + 2x_2^2$ が条件 $\lambda(x) \geq 0$ for $\forall x \in \mathbb{R}^2$ を満たすような a, b, c, d の特徴付け

$$
\begin{aligned}
d + bx_1 + cx_2 + x_1^2 + ax_1x_2 + 2x_2^2 &= (1, x_1, x_2)V \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= V_{00} + 2V_{01}x_1 + 2V_{02}x_2 + V_{11}x_1^2 + 2V_{12}x_1x_2 + V_{22}x_2^2 \\
\text{for } \exists V &= \begin{pmatrix} V_{00} & V_{01} & V_{02} \\ V_{01} & V_{11} & V_{12} \\ V_{02} & V_{12} & V_{22} \end{pmatrix} \succeq O
\end{aligned}
$$

$\Updownarrow$ 両辺の定数 $x_1, x_2, x_1x_2, x_1^2, x_2^2$ の係数は一致.

$$
d = V_{00},\ b = 2V_{01},\ c = 2V_{02},\ 1 = V_{11},\ a = 2V_{12},\ 2 = 2V_{22}, V \succeq O
$$

(Linear Matrix Inequality)

QOP(2 次最適化問題) 目的： $f_0(x) \equiv x^TQ_0x + q_0^Tx \to$ 最小化
条件： $f_i(x) \equiv x^TQ_ix + q_i^Tx + \pi_i \leq 0 \ (i = 1, \ldots, m)$

Lagrange 緩和問題： $\forall w \in \mathbb{R}^m_+$ を固定して，

目的： $L(x, w) \equiv f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} w_i f_i(x) \to$ 最小化; 条件： $x \in \mathbb{R}^n$

$\Updownarrow$ 等価

目的：$\zeta \to$ 最大化; 条件： $f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} w_i f_i(x) - \zeta \geq 0 \ (\forall x \in \mathbb{R}^n)$

$\Updownarrow$ 等価

目的:$\zeta \to$ 最大化; 条件: $f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} w_i f_i(x) - \zeta = (1, x^T)V \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ for$\exists V \succeq O$.

$\Updownarrow$ 両辺の $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の係数の比較

目的：$\zeta \to$ 最大化;
条件：パラメータ $w \in \mathbb{R}^m_+$ と変数 V に関する線形等式, $V \succeq O$

QOP(2次最適化問題) 目的: $f_0(x) \equiv x^T Q_0 x + q_0^T x \to$ 最小化
条件: $f_i(x) \equiv x^T Q_i x + q_i^T x + \pi_i \leq 0 \ (i = 1, \ldots, m)$

パラメータ $w \in \mathbb{R}^m_+$ を固定した Lagrange 緩和問題

$\Updownarrow$ 等価

目的: $\zeta \to$ 最大化;
条件: パラメータ $w \in \mathbb{R}^m_+$ と変数 V に関する線形等式, $V \succeq O$

$w \in \mathbb{R}^n_+$ に関する最大化 $\Downarrow$ 最良の Lagrange 緩和

SDP 目的: $\zeta \to$ 最大化;
条件: 変数 $w \in \mathbb{R}^m_+$ と V に関する線形等式, $V \succeq O$

QOPの SDP緩和 $\Updownarrow$ 双対

目的: $Q_0 \bullet X + q_0^T x \to$ 最小化

条件: $Q_i \bullet X + q_i^T x + \pi_i \leq 0 \ (i = 1, \ldots, m)$, $\begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & X \end{pmatrix} \succeq O$

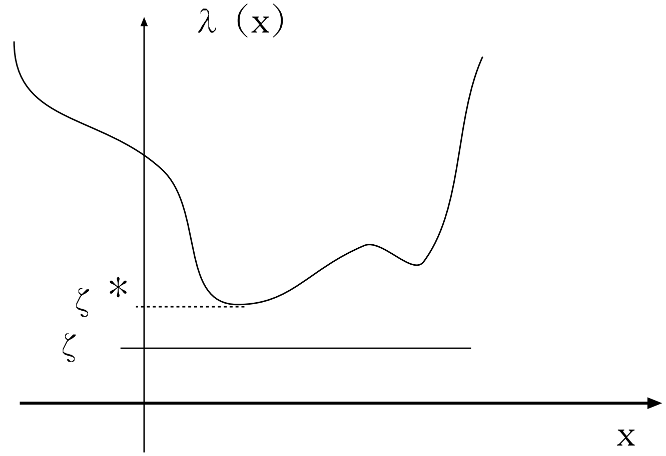
6. POP(多項式計画問題)の Lagrange 緩和 $\Longrightarrow$ SDP 緩和 — 1, 準備

$\lambda(x)$: 次数rの n変数多項式 $\rightarrow$ 最小化

$$\Updownarrow$$

目的: $\zeta \rightarrow$ 最大化; 条件: $\lambda(x) - \zeta \geq 0 \ (\forall x \in \mathbb{R}^n)$

変数は ζ のみ. $x \in \mathbb{R}^n$ は 条件$\lambda(x) - \zeta \geq 0 \ (\forall x \in \mathbb{R}^n)$ 記述用パラメータ.



非負条件の SOS (Sum of Squares of Polynomials) による置き換え.

$$\Downarrow \qquad \text{SOS} = \left\{ \sum_{j=1}^{k} g_j(x)^2 : g_j(x) \text{ は 多項式}, \ \forall k \right\}$$

目的: $\zeta \rightarrow$ 最大化; 条件: $\lambda(x) - \zeta \in$ SOS

6. POP(多項式計画問題)の Lagrange 緩和 $\Longrightarrow$ SDP 緩和 — 2, 準備

例: $\lambda(x) = -2x_1 + x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2^3 + 4x_1^2x_2^4$

目的: $\zeta \to$ **最大化**; **条件:** $\lambda(x) - \zeta \geq 0 \ (\forall x \in \mathbb{R}^2)$

$$\Downarrow$$

目的: $\zeta \to$ **最大化**

Sum of Squares

条件: $\lambda(x) - \zeta = (1, \ x_1, \ x_2, \ x_1x_2^2) \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} & V_{14} \\ V_{12} & V_{22} & V_{23} & V_{24} \\ V_{13} & V_{23} & V_{33} & V_{34} \\ V_{14} & V_{24} & V_{34} & V_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_1x_2^2 \end{pmatrix}$

for some 4×4 $V \succeq O$

$\Updownarrow$ **等式**の**両辺**での $1, \ x_1, \ x_2, \ x_1x_2^2$ の**係数**が**一致**

SDP (**半正定値計画問題**)

目的: $\zeta \to$ **最大化**

条件: $\zeta = V_{11}, \ -2 = 2V_{12}, \ 1 = V_{22}, \ 1 = V_{33}, \ -4 = 2V_{34},$
$4 = V_{44}, \ 0 = 2V_{13} = 2V_{23} = 2V_{14} = 2V_{24}, \ V \succeq O$

一般には，等式条件は V **の要素に関する線形方程式系になる．**

6. POP(多項式計画問題)の Lagrange 緩和 $\Longrightarrow$ SDP 緩和 — 3

POP 目的: $f_0(x) \rightarrow$ 最小化; 条件: $f_i(x) \leq 0 \ (i = 1, \ldots, m)$

ただし, $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_m(x)$ は多変数多項式

例2 (多項式最適化問題)

目的: $-x_1^3 + 2x_1x_2^2 \rightarrow$ 最小化;
条件: $x_1^4 + x_2^4 - 1 \leq 0, \ -x_1 \leq 0, \ -x_1^2 - x_2^2 + 0.5 \leq 0.$

Lagrange 関数: $L(x, w) = -x_1^3 + 2x_1x_2^2 + w_1(x_1^4 + x_2^4 - 1) + w_2(-x_1) + w_3(-x_1^2 - x_2^2 + 0.5) \quad (\forall w \in \mathbb{R}_+^m).$

$\Leftrightarrow$ Lagrange 双対問題 ζ, $w \in \mathbb{R}^m$ 変数

目的: $\zeta \rightarrow$ 最大化; 条件: $L(x, w) - \zeta \geq 0 \ (\forall x \in \mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow$ さらに, 緩和 $\Rightarrow$ SOS (Sum of Squares Optimization Problem)

目的: $\zeta \rightarrow$ 最大化; 条件: $L(x, w) - \zeta \in$ SOS $(\forall x \in \mathbb{R}^n)$

$\Leftrightarrow$ SDP(半正定値計画問題)

6. POP(多項式計画問題)の Lagrange 緩和 $\Longrightarrow$ SDP 緩和 — 3

POP 目的: $f_0(x) \rightarrow$ 最小化; 条件: $f_i(x) \leq 0 \ (i = 1, \ldots, m)$
ただし, $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_m(x)$ は多変数多項式

Lagrange 関数: $L(x, w) = f_0(x) + w_1 f_1(x) + \cdots + w_m f_m(x) \ (\forall w \in \mathbb{R}^m_+)$.

Lagrange 緩和問題 ($w \in \mathbb{R}^m_+$ を固定して)

目的: $L(x, w) \rightarrow$ 最小化 ; 条件: $x \in \mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow$ Lagrange 双対問題 ζ, $w \in \mathbb{R}^m$ 変数

目的: $\zeta \rightarrow$ 最大化 ; 条件: $L(x, w) - \zeta \geq 0 \ (\forall x \in \mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow$ さらに, 緩和 $\Rightarrow$ SOS (Sum of Squares Optimization Problem)

目的: $\zeta \rightarrow$ 最大化 ; 条件: $L(x, w) - \zeta \in$ SOS $(\forall x \in \mathbb{R}^n)$

$\Leftrightarrow$ SDP(半正定値計画問題)

7. まとめ

◇ 以下の 3 つは密接に結びついている．

(a) Lagrange 緩和

(b) SDP(Semidefinite Program, 半正定値計画緩和)

(c) Sum of Squares of Polynomials

◇ これらを適用する最適化問題の枠組みは

(i) 2 次最適化問題

(ii) 多項式最適化問題

(iii) （多項式+凸関数）最適化問題 — “凸な部分を緩和する必要はない”

◇ より大規模な最適化問題を解くには，

- 強力な計算機環境，SDP を含む凸計画問題を解く強力なソフトウエア
- 問題の構造，データの疎性の利用

参考文献

[1] M. Kojima, S. Kim and H. Waki, "A general framework for convex relaxation of polynomial optimization problems over cones", *J. of OR Society of Japan*, 46 (2003) 125-144.

[2] J. B. Lasserre, "Global optimization with polynomials and the problems of moments", *SIAM J. on Optimization*, 11 (2001) 796–817.

[3] P. A. Parrilo, "Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems". *Math. Prog.*, 96 (2003) 293–320.

[4] S. Prajna, A. Papachristodoulou and P. A. Parrilo, "SOSTOOLS: Sum of Squares Optimization Toolbox for MATLAB – User's Guide", Control and Dynamical Systems, California Institute of Technology, Pasadena, CA 91125 USA, 2002.

[5] M. Putinar, "Positive polynomials on compact semi-algebraic sets", *Indiana University Mathematics Journal*, 42 (1993) 969–984.

[6] V. Powers and T. Wörmann, "An algorithm for sums of squares of real polynomials", *Journal of Pure and Applied Algebra*, 127 (1998) 99-104.

[7] B. Reznick, "Extremal psd forms with few terms", *Duke Mathematical Journal*, 45 (1978) 363-374.